# ЛЕКЦИЯ 4

**ТЕМА: Проверка статистических гипотез**

Вопросы темы. Статистическая гипотеза. Статистический критерий. Область принятия гипотезы и критические области. Ошибки при проверке гипотез. Схема проверки гипотез

## Статистическая гипотеза

**Статистической гипотезой** называется любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о параметрах известных распределений, которым подчиняется генеральная совокупность.

Предположим, что на основании имеющихся данных есть основания выдвинуть предположения о **законе распределения** или о параметре закона распределения случайной величины (или генеральной совокупности, на множестве объектов которой определена эта случайная величина). Задача проверки статистической гипотезы заключается в подтверждении или опровержении этого предположения на основании выборочных (экспериментальных) данных.

Проверка статистической гипотезы означает проверку соответствия выборочных данных выдвинутой гипотезе. Параллельно с выдвигаемой основной гипотезой, рассматривают и противоречащую ей гипотезу, которая называется **конкурирующей** или **альтернативной**. Альтернативная гипотеза считается справедливой, если основная выдвинутая гипотеза отвергается.

**Параметрической гипотезой** называется гипотеза о значениях параметров распределения или о сравнительной величине параметров двух распределений. Примером параметрической статистической гипотезы является гипотеза о **равенстве математических ожиданий** двух нормальных совокупностей.

**Непараметрическими гипотезами** называются гипотезы о **виде распределения** случайной величины.

**Нулевой,** основной или проверяемой гипотезой называется первоначально выдвинутая гипотеза, которая обозначается $H0$.

**Конкурирующей** или **альтернативной гипотезой** называется гипотеза, которая противоречит основной гипотезе $H0$ и обозначается $H1$.

Например, основная гипотеза $H0$ состоит в том, что математическое ожидание $\mu$ равно какому-то значению $\mu 0$. В этом случае конкурирующая гипотеза $H1$ может состоять в предположении, что математическое ожидание $\mu$ не равно (больше или меньше) значения $\mu 0$:

$H0: \mu=\mu0; H1: \mu\neq\mu0$, или $H1: \mu>\mu0, H1: \mu<\mu0.$

При проверке статистических гипотез существует вероятность допустить ошибку, приняв или опровергнув верную гипотезу. Уровнем значимости ($a$) называется вероятность совершения ошибки первого рода. Значение уровня значимости $a$ обычно задается близким к нулю (например, 0,05; 0,01; 0,02 и т. д.), потому, что чем меньше значение уровня значимости, тем меньше вероятность совершить ошибку первого рода, состоящую в опровержении верной гипотезы $H0$. **Р—статистическая достоверность** принятия верной гипотезы. Проверка справедливости статистических гипотез осуществляется с помощью различных статистических критериев. В статистике пользуются различными уровнями значимости:

$\alpha=0{,}05$, тогда Р=0,95 ( в 5 случаях из 100)

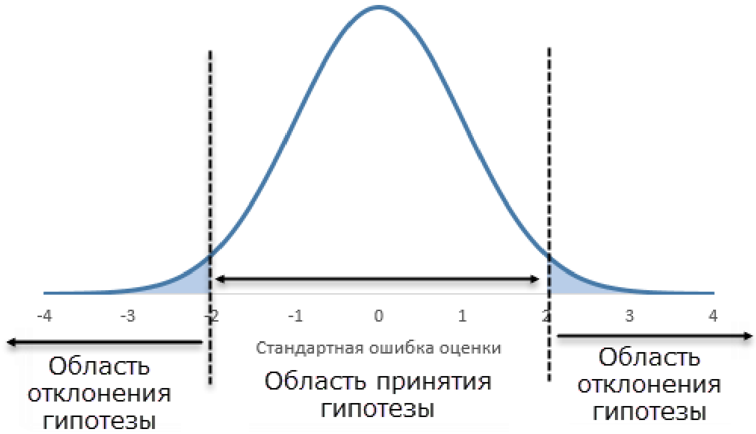
$\alpha=0{,}01$, тогда Р=0,99 (в 1 случае из 100) может быть отвергнута правильная гипотеза

$\alpha=10^{-k}$, тогда Р=0,00 09 (в 1 случае из $10^{k}$)

**Статистическим критерием** называется случайная величина, которая используется с целью проверки нулевой гипотезы. Статистические критерии называются соответственно по тому закону распределения, которому они подчиняются, т. е. $F$-критерий подчиняется распределению Фишера-Снедекора, $\chi2$-критерий подчиняется $\chi2$-распределению, $T$-критерий подчиняется распределению Стьюдента, $U$-критерий подчиняется нормальному распределению.

**Областью принятия гипотезы** или областью допустимых значений называется множество возможных значений статистического критерия, при которых основная гипотеза принимается. Если наблюдаемое значение статистического критерия, рассчитанное по данным выборочной совокупности, принадлежит **критической области**, то основная гипотеза отвергается. Если наблюдаемое значение статистического критерия принадлежит области принятия гипотезы, то основная гипотеза принимается.

На рисунке **Область принятия гипотезы** и **критические области**.




Рассмотрим на примере:

Предположим, что в эксперименте участвуют две группы заключенных. Одна из них (контрольная) содержится и перевоспитывается по традиционной программе, а для второй (экспериментальная) используется новые методы.

По полученным данным необходимо проверить следующие утверждения:

1. Среднее значение уровня агрессивности не изменилось, т. е. $\mu_2 = \mu_1$. Здесь $\mu_1$ и $\mu_2$– средние значения соответствующих генеральных совокупностей ( уровни агрессивности всех аналогичных заключенных, которые могли бы перевоспитывается по традиционной ($\mu_1$) и новой ($\mu_2$ ) программам).

2. Вариативность агрессивности возросла: $\sigma_2 > \sigma_1$ . Здесь $\sigma_2$ и $\sigma_1$— так же, как и в п.1, значения соответствующих генеральных параметров.

3. Средняя агрессивность возросла на 3 единицы: $\mu_2 - \mu_1 = 3$

Это три различные статистические гипотезы. Вообще возможных утверждений может быть много. Гипотезы предстоит проверить с помощью какого-то метода — критерия, например Стьюдента. Статистические гипотезы обычно рассматривают, генеральные совокупности, одна из которых может представлять собой теоретическую модель (например, нормальное распределение), а о второй судят по выборке из нее. В других случаях обе генеральные совокупности представлены выборками.

**Ошибки при проверке гипотез**

Ошибки, допускаемые при проверке гипотез, удобно разделить на два типа:

1) отклонение гипотезы $H_0$, когда она верна, — ошибка первого рода;

2) принятие гипотезы $H_0$, когда в действительности верна какая-то другая гипотеза, — ошибка второго рода.

Вероятность ошибки первого рода обозначается α. Величина α называется уровнем значимости критерия, по которому проверяется справедливость гипотезы $H_0$.

Вероятность ошибки второго рода обозначается β. Ее величина зависит от альтернативной гипотезы $H_1$ Рассмотрим для приведенного выше примера следующие две ситуации: 1) в действительности средняя агрессивность возросла на 3 единицы, 2) средняя агрессивность увеличилась на 30 единиц. Ясно, что для одних и тех же условий эксперимента и одинакового уровня значимости α вероятность ошибки второго рода β (принять гипотезу об отсутствии различия) для второй из альтернатив будет меньше.

Вероятности α и β удобно представить, как это сделано в табл.1. Таблица 1

| | Решение | |
|---|---|---|
| | Принять $H_0$ | Принять $H_1$ |
| Справедлива $H_0$ | Правильное с вероятностью $1 – α$ | Ошибочное с вероятностью α |
| Справедлива $H_1$ | Ошибочное с вероятностью β | Правильное с вероятностью $1 – β$ |

**Общая схема проверки гипотез**

Процедура проверки гипотез обычно проводится по следующей схеме:

1. Формулируются гипотезы $H_0$ и $H_1$.

2. Выбирается уровень значимости критерия α.

3. По выборочным данным вычисляется значение ***Кнабл*** некоторой случайной величины ***K***, называемой статистикой критерия, или просто критерием, который имеет известное стандартное распределение (нормальное, Т-распределение Стьюдента и т.п.)

4. Вычисляется критическая область и область принятия гипотезы. То есть находится критическое (граничное) значение критерия ***Ккр*** при уровне значимости ***α***, взятым из соответствующих таблиц.

5. Найденное значение ***Кнабл*** критерия сравнивается с ***Ккр*** и по результатам сравнения делается вывод: принять гипотезу или отвергнуть.

6а. Если вычисленное по выборке значение критерия ***Кнабл*** меньше чем ***Ккр***, то гипотеза Но принимается на заданном уровне значимости α. (В этом случае наблюдаемое по экспериментальным данным различие генеральных совокупностей можно объяснить только случайностью выборки. Однако принятие гипотезы $H_0$ совсем не означает доказательства равенства параметров генеральных совокупностей. Просто имеющийся в распоряжении статистический материал не дает оснований для отклонения гипотезы о том, что эти параметры одинаковы. (Может появится другой экспериментальный материал, на основании которого эта гипотеза будет отклонена.)

6в Если вычисленное значение критерия ***Кнабл*** больше ***Ккр***, то гипотеза $H_0$ отклоняется в пользу гипотезы $H_1$ при данном уровне значимости $\boldsymbol{\alpha}$. (В этом случае наблюдаемое различие генеральных совокупностей уже нельзя объяснить только случайностями и говорят, что наблюдаемое различие значимо (статистически значимо) на уровне значимости α.)

Для нашего примера по 10 ти бальной шкале агрессивности

$\mu_2 = 8$, а $\mu_1=6$ $\sigma_2=4$ и $\sigma_1 =2$ n1=35, n2=27

рассчитаем выборочное значение t- статистики:

$$t\left(df = n_1 + n_2 - 2\right) =$$
$$= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)}} \bullet \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

По таблице значений функции Стьюдента (критическая область) при:

- α = 0.01
- число степеней свободы ν=35+27-2=60
- находим t-табличное =2,66
- t-расчетное = 0,45 не попадает в допустимую область (-2,66, +2,66)

Следовательно нулевая гипотеза о равенстве матожиданий (средних)