ЛЕКЦИЯ 5

ТЕМА: Проверка параметрических гипотез

Вопросы темы. Критерий Стьюдента гипотезы о равенстве средних. Критерий Фишера гипотезы о равенстве дисперсий. Критерий согласия хи-квадрат. Критерий Колмогорова – Смирнова.

Гипотеза о равенстве (различии) двух выборочных средних

Пусть дана выборка из n_1 значений нормально распределённой СВ X и n_2 значений нормально распределенной СВ Y, причем

$$X \Rightarrow N(m_x, \sigma_x^2); \quad Y \Rightarrow N(m_y, \sigma_y^2).$$

Необходимо проверить гипотезу $H_0: \ m_x = m_y$, против гипотезы $H_1: \ m_x \neq m_y$ при заданном уровне значимости α.

Доказано, что выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются эффективными и несмещенными оценками соответствующих математических ожиданий с соответствующими дисперсиями: σ_x^2/n_1, σ_y^2/n_2. Однако на практике дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 нам неизвестны, тогда воспользуемся объединённой оценкой $\sigma^2 \Rightarrow S^2$, полученной из обеих выборок:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2}{n_1+n_2-2}.$$

В качестве статистики (оценки) мы используем $t-$статистику (распределение Стьюдента) $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы:

$$t_k = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{S(x-y)} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1}+\frac{S^2}{n_2}}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{S\cdot\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}}.$$

Теперь сравним полученное значение с соответствующим значением квантиля и, если $t_{k,1-\alpha/2} > t_k$, то принимаем нулевую гипотезу, в противном случае нулевая гипотеза отвергается, и считаем справедливой альтернативную гипотезу H_1.

Замечание Для статистики Стьюдента можно рассматривать как двусторонние, так и односторонние критерии.

Критерий Фишера

Критерий Фишера применяется при проверке гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей, распределенных по нормальному закону. Гипотезы о дисперсиях возникают довольно часто, так как дисперсия характеризует такие исключительно важные показатели, как точность машин, приборов, технологических процессов, риск, связанный с отклонением доходности активов от ожидаемого уровня, и т.д.

Сформулируем задачу. Пусть имеются две нормально распределенные совокупности, дисперсии которых равны σ_1^2 и σ_2^2. Необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий, т.е. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ относительно конкурирующей H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ или H_1': $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Для проверки гипотезы H_0 из этих совокупностей взяты две независимые выборки объемом n_1 и n_2. Так как оценки дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 нам неизвестны, воспользуемся несмещенными выборочными оценками дисперсий S_1^2 и S_2^2.

Тогда при справедливости гипотезы H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ в качестве оценки σ^2 можно взять те же дисперсии S_1^2 и S_2^2, рассчитанные по элементам первой и второй выборок.

Известно, что выборочные характеристики $\frac{(n_1-1)\cdot S_1^2}{\sigma^2}$ и $\frac{(n_2-1)\cdot S_2^2}{\sigma^2}$ имеют распределение χ^2 соответственно с $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ степенями свободы, а их отношение $\frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)}$ имеет $F-$ распределение Фишера – Снедекора с k_1 и k_2 степенями свободы. Следовательно, случайная величина F, определяемая отношением:

$$F = \frac{\frac{1}{n_1-1}\left[(n_1-1)\cdot S_1^2/\sigma^2\right]}{\frac{1}{n_2-1}\left[(n_2-1)\cdot S_2^2/\sigma^2\right]} = \frac{S_1^2}{S_2^2},$$

т.е. отношение несмещенных выборочных дисперсий имеет $F-$ распределение Фишера – Снедекора с $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ степенями свободы.

Очевидно, что при равенстве дисперсий величина критерия будет равна единице. В остальных случаях она будет больше (меньше) единицы. При формировании критерия отклонения (принятия) гипотезы H_0 следует учесть, что распределение статистики F (в отличие от нормального или распределения Стьюдента является несимметричным.)

Критерий Фишера $\mathrm{F}(\alpha, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)$ – двусторонний критерий, и нулевая гипотеза $H_0: S_1^2 = S_2^2$ принимается (отвергается альтернативная гипотеза $H_1: S_1^2 \neq S_2^2$) если $\mathrm{F}(\alpha/2, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2) < \mathrm{F} < \mathrm{F}(1 - \alpha/2, \mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)$.

<u>Проверка непараметрических гипотез</u>

Критерий согласия хи-квадрат

Одной из важнейших задач математической статистики является **установление теоретического закона распределения случайной величины** по опытному (эмпирическому распределению), представляющему вариационный ряд.

Предположения о **виде закона распределения** выдвигаются исходя из теоретических предпосылок, опыта аналогичных исследований, и, наконец, на основании графического изображения эмпирического распределения.

Параметры эмпирического распределения, как правило, неизвестны, поэтому их заменяют выборочными оценками (несмещенными, эффективными и состоятельными).

При сравнении теоретического и эмпирического распределения неизбежны расхождения. Естественно возникает вопрос, обусловлены ли эти расхождения только случайными факторами, связанными с ограниченным числом наблюдений (объемом выборки), или они являются существенными и обусловлены неудачным выбором теоретического закона распределения. Для ответа на этот вопрос и служат **критерии согласия**.

Критерий согласия хи-квадрат Пирсона является весьма общим методом построения тестов для проверки различных гипотез. Рассмотрим исходную схему.

Введем обозначения:

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{m} -$ m возможных исходов некоторого опыта;

$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{m}$ – вероятности соответствующих исходов, причем $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{p}_\mathrm{i} = 1$;

n – число независимых повторений опыта;

$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mathrm{m}$ – число появлений соответствующих исходов в n опытах, причем $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \nu_\mathrm{i} = \mathrm{n}$;

$p_1^0, \dots, p_m^0$ –гипотетические значения вероятностей, $p_i^0 > 0,\ \sum_{i=1}^m p_i^0 = 1$;

Требуется по наблюдениям $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ проверить гипотезу H о том, что вероятности $p_1, p_2, \dots, p_m$ имеют значения $p_1^0, \dots, p_m^0$, т.е.
H_0: $p_i = p_i^0, i = 1, \dots m$.

Оценками для $p_1, p_2, \dots, p_m$ являются $\hat{p}_1 = \nu_1/n, \dots \hat{p}_m = \nu_m/n$. Мерой расхождения между гипотетическими и эмпирическими вероятностями принимается величина

$$X^2 = n \sum_{i=1}^m p_i^0 \left(\frac{\hat{p}_i - p_i^0}{p_i^0}\right)^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(\nu_i - np_i^0)^2}{np_i^0} = \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i^2}{np_i^0} - n.$$

Статистика X^2 называется статистикой хи-квадрат Пирсона, а процедура проверки гипотезы состоит в том, что если величина X^2 приняла "слишком большое значение", т.е. $X^2 \geq h$, то гипотеза H_0 отклоняется. В противном случае будем говорить, что наблюдения не противоречат гипотезе. На вопрос, что означает "слишком большое значение", отвечает следующая теорема.

Теорема К. Пирсона. Если гипотеза H верна и $p_i^0 > 0, i = 1, \dots m$, то при $n \to \infty$ распределение статистики X^2 асимптотически подчиняется распределению хи-квадрат с $m - 1$ степенями свободы, т.е.

$$P\{X^2 < x/H\} \to F_{m-1}(x) \equiv P\{\chi^2_{m-1} < x\}.$$

Порог h выберем из условия: вероятность ошибки первого рода должна быть малой – равной выбираемому значению уровня значимости α:

$$P\{\text{отклонить } H/H \text{ верна}\} = P\{X^2 \geq h/H\} \cong P\{\chi^2_{m-1} \geq h/H\} = \alpha,$$

откуда

$$h = \chi^2_{1-\alpha, m-1}$$

– квантиль уровня $1 - \alpha$ распределения хи-квадрат с $m - 1$ степенями свободы.

На практике случайную выборку из n независимых наблюдений сгруппируем по $k-$ интервалам, называемым интервалами группировки. Число степеней свободы распределения хи-квадрат в этом случае равно k (число интервалов группировки) минус число различных независимых линейных ограничений, наложенных на наблюдения:

- Первое ограничение связано с тем, что частота в последнем интервале группировки полностью определяется частотами всех остальных интервалов, т.е. не является независимой величиной.

- Если гипотетическая (предполагаемая) плотность – нормальная, с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, то появятся два дополнительных ограничения, поскольку для подбора нормальной плотности мы используем две выборочные оценки $(\bar{x}, S^2)$.

Естественно, при проверке нормальности распределения $m = k - 3$.

Критерий Колмогорова

При анализе выборок малого объема невозможно применить критерий χ^2 (группирование данных некорректно). В этом случае часто используется критерий Колмогорова, в котором в качестве меры расхождения между теоретическим и эмпирическим распределениями рассматривают максимальное значение абсолютной величины разности между эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ и соответствующей теоретической функцией распределения:

$$D = \max_{-\infty \le x \le \infty} |F_n(x) - F(x)|$$

Оценка D называется **статистикой критерия Колмогорова**.

Доказано, что какова бы ни была функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X, при неограниченном увеличении числа наблюдений $n \to \infty$ вероятность неравенства $P(D\sqrt{n} \ge \lambda)$ стремится к пределу:

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2k^2\lambda^2}$$

Задавая уровень значимости α, из соотношения $P(\lambda) = \alpha$ находим соответствующее критическое значение λ_α.

Рассмотрим схему применения критерия Колмогорова:

- На первом этапе строятся эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ и предполагаемая теоретическая функция распределения $F(x)$
- На втором этапе определяется мера расхождения D между теоретическим и эмпирическим распределением по формуле и вычисляется величина

$$\lambda = D\sqrt{n}$$

- Если вычисленное значение λ окажется больше критического λ_α, определенного на уровне значимости α, то нулевая гипотеза H_0 о том, что случайная величина X имеет заданный закон распределения, отвергается (односторонний критерий). Если $\lambda < \lambda_\alpha$, то считаем, что гипотеза H_0 не противоречит опытным данным.

Двухвыборочный критерий Колмогорова – Смирнова

Рассматриваются две выборки случайных величин

$$X: x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \text{ и } Y: y_1, y_2, \dots, y_{n_2}.$$

Перед исследователем стоит вопрос: обе выборки извлечены из совокупности с одним и тем же законом распределения вероятностей? Говоря языком математической статистики, необходимо проверить нулевую гипотезу $H_0: F_{n_1}(x) = F_{n_2}(y)$ о совпадении функций распределения вероятностей в двух выборках. В качестве меры расхождения здесь рассматривается разность двух эмпирических функций распределения вероятностей [1]:

$$D_n^* = \max\left|F_{n_1}(x) = F_{n_2}(y)\right|.$$

Статистика критерия Колмогорова-Смирнова имеет вид:

$$\lambda' = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \max\left|F_{n_1}(x) = F_{n_2}(y)\right|.$$

Гипотеза H_0 отвергается, если фактически наблюдаемое значение статистики λ' больше критического λ'_α, т.е. $\lambda' > \lambda'_\alpha$, и принимается в противном случае.