Лекция

Тема: «СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ»

План

1. **Основные понятия. Графическое изображение скалярных полей**
2. **Производная по направлению**
3. **Градиент функции**
4. **Оператор набла (или оператор Гамильтона)**

Основные понятия

- Определение: если в каждой точке пространства определено значение некоторой физической величины, то в пространстве задано поле этой величины
- Например, при рассмотрении потока газа приходится исследовать поля температур, плотностей, скоростей, импульсов молекул газа, энергий и пр.

поля	
<u>скалярные</u> Примеры: 1) поле температур внутри нагретого тела; 2) поле плотности тела; 3) поле распределения потенциала в электрическом поле; 4) и т.д.	**<u>векторные</u>** Примеры: 1) поле скоростей; 2) поле силы; 3)поле распределения напряжённости в электрическом поле; 4) и т.д.

Скалярное поле

- Пусть G-некоторая область плоскости или пространства
- Определение: если в каждой точке P из области G определена скалярная величина u, то говорят, что в области G задано скалярное поле $u(x,y,z)$ или $u(x,y)$, или $u(P)$
- **Определение** Задать скалярное поле- это означает задать скалярную функцию $u=u(P)$, называемую ***скалярной функцией поля.***

Скалярное поле	
стационарное (установившееся) Для этих полей величина $u(P)$ **не** зависит от времени t.	**нестационарное (неустановившееся)** Для этих полей величина $u(P)$ **зависит** от времени t: $u(P,t)$

- **Например,** если в теплопроводящую среду внесено раскалённое тело, которое с течением времени охлаждается, то температура в точках этой среды зависит от времени, и имеется *нестационарное скалярное поле температур*

Графическое изображение скалярных полей

Определение. Геометрическое место точек, в которых функция u(P) принимает заданное значение C, называется поверхностью (или линией) уровня

G-область	
На плоскости В прямоугольной системе координат уравнение ***линии уровня*** имеет вид $u(x,y)=C = const$	В пространстве В прямоугольной системе координат ***уравнение поверхности уровня*** имеет вид $u(x,y, z)=C = const$

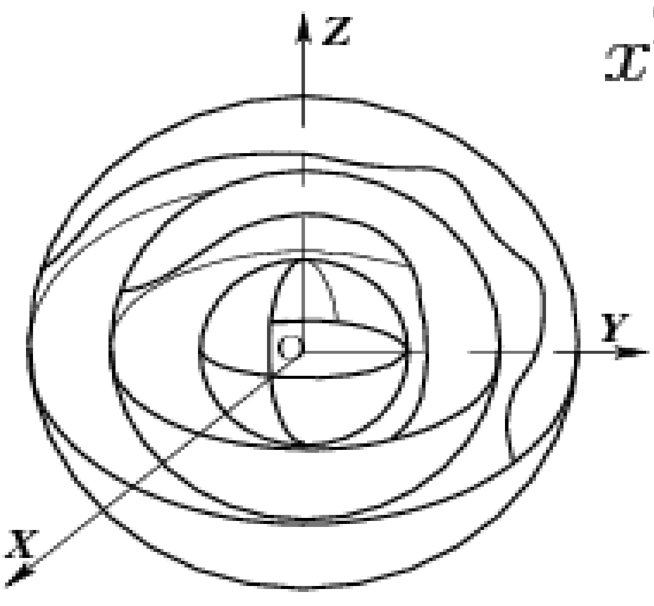
- Придавая С (константе) различные значения, получим

- **семейство линий уровня (*изолиний)***

или

- **поверхностей уровня**.

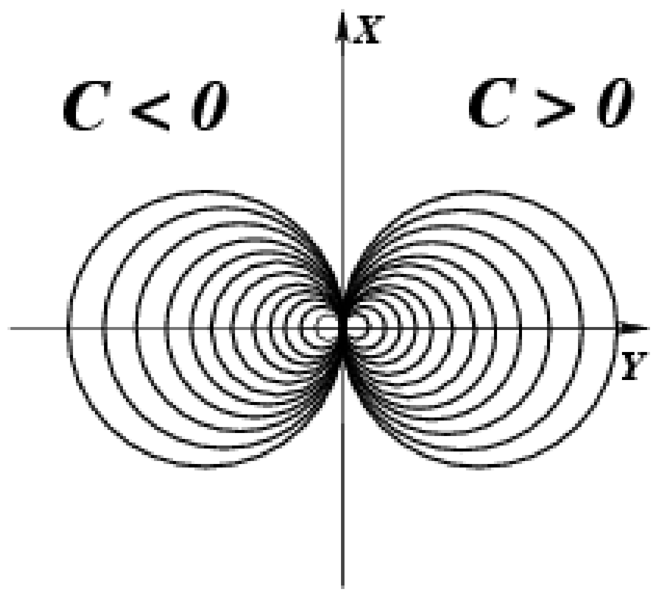
<u>Примеры</u>. 1) Поверхности уровня скалярного поля.



$$x^2 + y^2 + z^2 = C$$

2) Линии уровня плоского поля. (2-х мерный аналог потенциала электрического диполя).

$$py = C(x^2 + y^2) \quad \Longrightarrow \quad \left[y - \frac{1}{2}Cp\right]^2 + y^2 = \left[\frac{1}{2}C\right]^2.$$

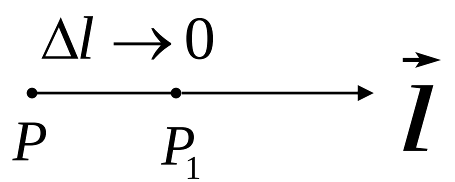


Производная по направлению

- **Производной скалярного поля** u(P) **в точке** P **по направлению** $\bar{l}$ называется предел (если он существует) отношения приращения Δu функции u(P) при смещении точки в направлении вектора $\bar{l}$ к величине этого смещения $\Delta l = PP_1$, когда последнее стремиться к нулю и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{d \to 0} \frac{u(P_1) - u(P)}{\left|PP_1\right|}$$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



Если $u = u(x, y, z)$ (т.е. функция рассматривается в прямоугольной системе координат), то:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \quad ,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{l}$

Направляющие косинусы

- **Направляющие косинусы** вектора (в пространстве) – это косинусы углов, которые вектор образует с положительными полуосями координат. Направляющие косинусы однозначно задают направление вектора. В общем случае для вектора с координатами (x; y; z) направляющие косинусы равны:
- Сумма квадратов направляющих косинусов равна 1.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{l}|} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{l}|} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{l}|} \end{cases}$$

ВЫВОДЫ

- Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ характеризуют скорость изменения функции в направлении осей координат.
- Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ характеризует скорость изменения функции

$u = u(x, y, z)$ в точке P по направлению вектора $\vec{l}$.

- Если $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ в т.Р по данному направлению $\vec{l}$,то функция в этом направлении возрастает, и, наоборот.

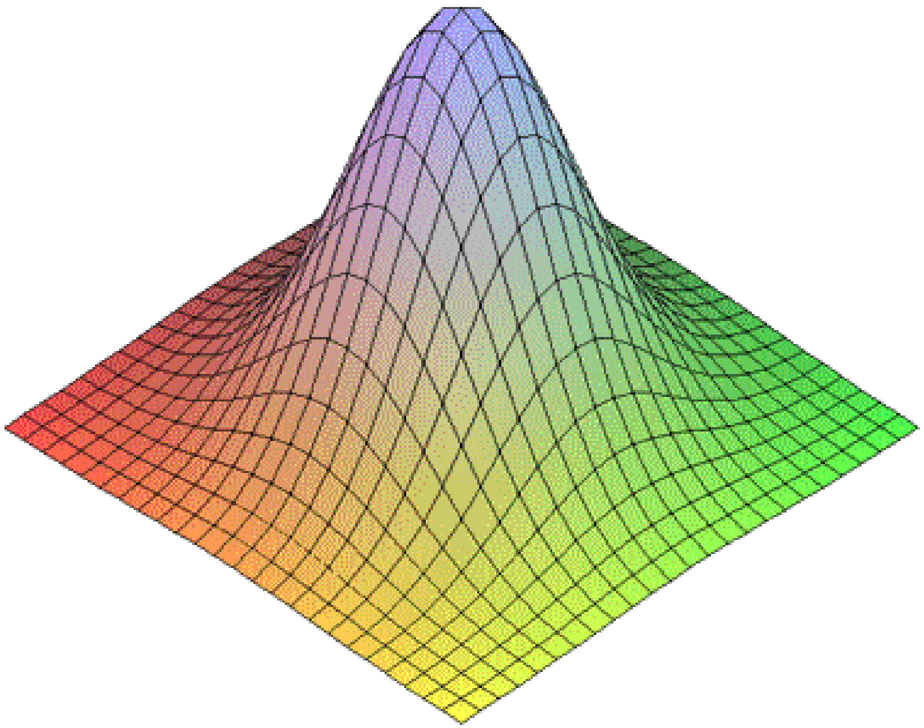
Пример

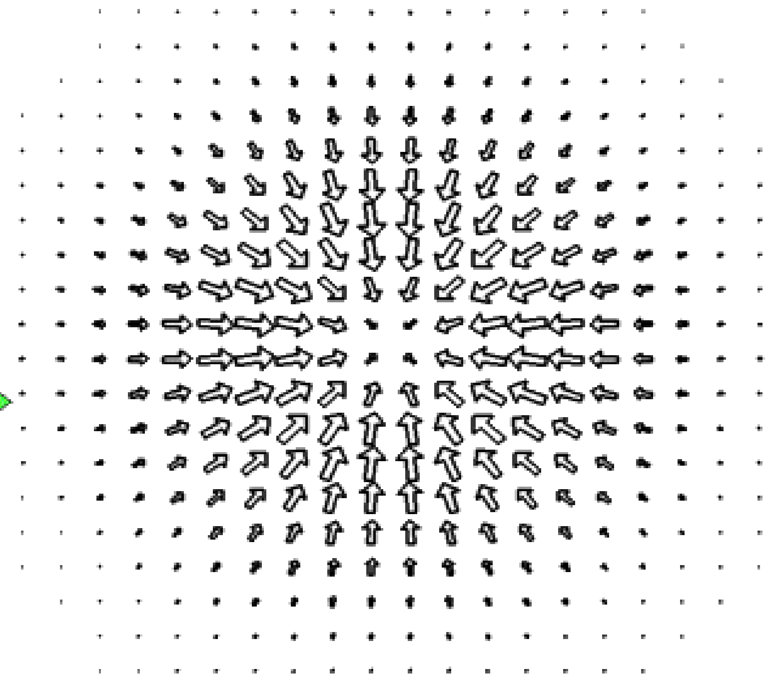
Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$

в т. $P(1;2;-1)$ по направлению к т. $P_1(2;4;-3)$

- **Градиент** (от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий) — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. Например, если взять высоту поверхности Земли над уровнем моря (2-мерное пространство), то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «в горку».

Операция градиента преобразует холм (слева), если смотреть на него сверху, в поле векторов (справа). Видно, что вектора направлены в горку и тем длиннее, чем круче наклон





Градиент функции

Определение. Вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ называется **градиентом** скалярного поля $u=u(P)$ точке P и обозначается $grad u$:

$$grad u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Примечание: градиент можно рассматривать как некоторое векторное поле

- Величиной градиента называют скалярное поле

$$\left|grad u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

- Английским математиком Уильямом Гамильтоном (1805-1865) был введён векторный дифференциальный оператор набла (*набла* – это греческое слово, переводящееся как «арфа», написание этого слова по-гречески напоминает перевёрнутый треугольник).
- Определение. **Оператор** – это определённые математические действия (или их последовательность) предложенная в виде определённых математических символов.
- Примечание: оператор всегда действует на выражение, стоящее справа от него

Уильям Роуэн Гамильтон

- Сэр Уильям Роуэн Гамильтон — выдающийся ирландский математик, механик и физик XIX века.
- Родился: 4 августа 1805 г., Дублин, Ирландия
- Умер: 2 сентября 1865 г., Дублин, Ирландия
- Образование: Тринити-колледж (Дублин), Вестминстерский колледж
- Награда: Королевская медаль

- **Оператор набла (оператор Гамильтона)** имеет вид: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

- Подействуем оператором набла на функцию

$u = u(x, y, z)$ и получим:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla u = grad u$$

Связь между производной по направлению и градиентом

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \\
&grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \\
&\vec{l_0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial u}{\partial l} = grad\,u \cdot \vec{l_0}}_{\text{скалярное произведение}} = \left|grad\,u\right| \cdot \underbrace{\left|\vec{l_0}\right|}_{=1} \cdot \cos\varphi$$

далее:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|gradu\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{np_{\vec{l}}\,gradu}{\left|gradu\right|} \quad \Rightarrow \quad \left|gradu\right| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{l}}\,gradu$$

и, наконец, формула связи имеет вид

$$np_{\vec{l}}\, grad u = \frac{\partial u}{\partial l}$$

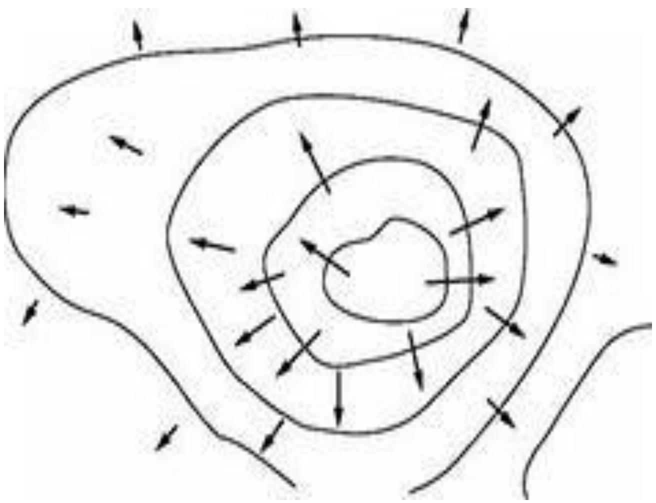
- **<u>Выводы</u>:**

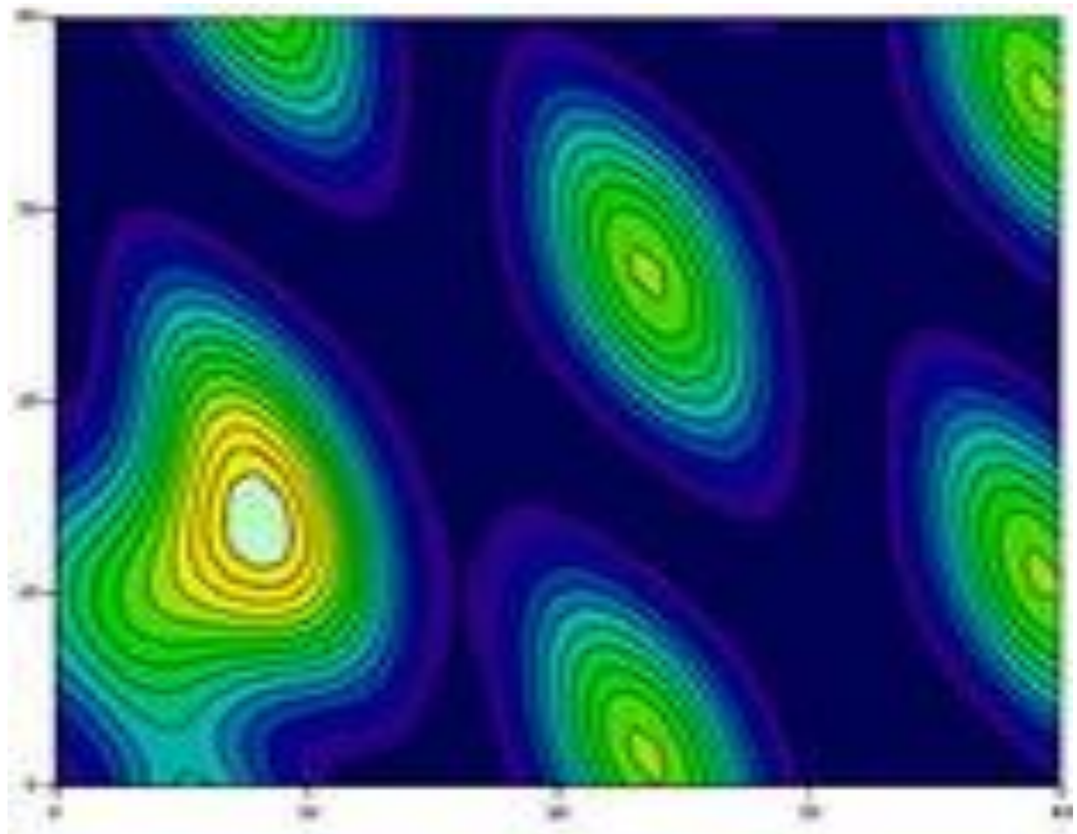
1) производная скалярного поля $u(P)$ в точке P в данном направлении равна проекции градиента поля в точке P на это направление.
2) при $\varphi = 0$ производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет наибольшее значение, т.е. $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке P имеет наибольшее значение в направлении градиента. Тогда:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{наибольшее} = |grad u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

3) модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания скалярного поля в данной точке.
4) градиент указывает направление наибольшего возрастания скалярного поля в данной точке.
4) градиент скалярного поля в каждой точке перпендикулярен поверхностям уровня этого скалярного поля.

Скалярное поле и градиент





Пример. Рассмотрим поле точечного заряда. Потенциал определяется формулой

$$\varphi = k\frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\underbrace{k\frac{q}{r^2}}_{=\left|\vec{E}\right|},$$

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Поле уединённого точечного положительного заряда