К ЛЕКЦИИ 2

ТЕМА: Элементы теории поля. Понятие векторного поля. Поток и дивергенция векторного поля. Формула Остроградского - Гаусса.

ПЛАН

1. Основные понятия и определения.
2. Поток векторного поля через поверхность.
3. Дивергенция.
4. Формула Остроградского-Гаусса

1. Основные понятия и определения.

Продолжаем знакомиться с понятием «поле», которое является фундаментальным для многих представлений современной физики.

Вспомним из прошлой лекции:

Стационарные поля	
Стационарные **скалярные** Примеры: 1) поле температур внутри нагретого тела; 2) поле плотности массы; 3) поле распределения потенциала в электрическом поле; 4) и т.д.	Стационарные **векторные** Примеры: 1) поле скоростей; 2) поле силы; 3)поле распределения напряжённости в электрическом поле; 4) и т.д.
рассмотрели на прошлой лекции	*будем рассматривать на этой лекции*

Определение | Пусть G- некоторая область на плоскости или в пространстве. Если каждой точке M из G сопоставлен вполне определённый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области G задано **векторное поле**.

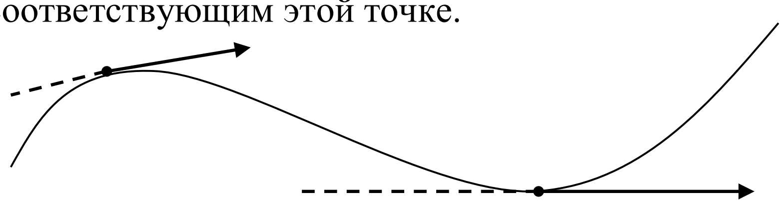
Определение | **Задать векторное поле-** это означает задать векторную функцию $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, называемую **векторной функцией поля**.

Примеры векторных полей:
- поле силы тяжести;
- поле скорости частиц текущей жидкости;
- поле магнитной индукции;
- поле плотности электрического тока.

Частные случаи векторных полей:

- **Однородное векторное поле** – поле, для которого вектор $\vec{a}(M)$- постоянный вектор, т.е. $P, Q \quad и \quad R$ являются постоянными.
  Примером таких полей является поле силы тяжести.
- **Плоские векторные поля** – это поля, для которых вектор $\vec{a}(M)$ имеет вид: $\vec{a}(P,Q)$, $\vec{a}(Q,R)$ или $\vec{a}(P,R)$.
  С такими полями, например, часто встречаются в теме «Гидродинамика» при изучении плоских течений жидкости.

Определение | **Векторной линией** векторного поля называется линия в каждой точке которой касательная совпадает с вектором, соответствующим этой точке.



Примеры:
- В поле скоростей текущей жидкости: векторная линия – линия тока жидкости (по ней движутся частицы жидкости).
- Электростатическое поле: векторная линия – силовая линия.

Векторная линия определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (1)$$

2. Поток векторного поля через поверхность.

Определение

Потоком П вектора $\vec{a}(M)$ (или **потоком векторного поля** $\vec{a}(M)$), где $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, через поверхность S называется поверхностный интеграл:

$$\boxed{\Pi=\underbrace{\iint\limits_S (P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)dS}_{\text{поверхностный интеграл }1^{го}\text{ рода}}}=$$

$$\boxed{\underbrace{\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy}_{\text{поверхностный интеграл }2^{го}\text{ рода}}}=\boxed{\iint\limits_S \overbrace{\vec{a}(M)\cdot\vec{n}_0}^{\text{скалярное произведение}}\,dS}$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{здесь } \vec{n}_0 \text{ –}\\ \text{единичный}\\ \text{вектор нормали}\end{array}\right|=$$

$$=\iint\limits_S |\vec{a}(M)|\cdot\underbrace{|\vec{n}_0|}_{1}\cdot\cos\varphi\cdot dS=\left|\begin{array}{c}\text{здесь } \varphi \text{ –}\\ \text{угол между}\\ \vec{a}(M) \text{ и } \vec{n}_0\end{array}\right|=\boxed{\iint\limits_S \underbrace{a_n(M)}_{\text{проекция } \vec{a} \text{ на } \vec{n}_0}\,dS} \qquad (2)$$

Физический смысл: если векторное поле $\vec{a}(M)$ - поле скоростей жидкости, то потоком является количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S.

Особый интерес представляет случай, когда S - замкнутая поверхность. В этом случае берут внешнюю нормаль, а формула для потока принимает вид:

$$\boxed{\Pi=\oiint\limits_S a_n(M)dS} \qquad (3)$$

Если векторное поле $\vec{a}(M)$ - поле скоростей жидкости, то величина потока Π даёт разность между количеством жидкости вытекающей из области S, и количеством жидкости, втекающей в эту область:

- $\boxed{\text{Если } \Pi>0}\Rightarrow$ из области S жидкости вытекает больше, чем втекает $\Rightarrow$ в области S имеются **истоки**, питающие поток (например, река с бьющими на дне родниками)
- $\boxed{\text{Если } \Pi<0}\Rightarrow$ из области S жидкости вытекает меньше, чем втекает $\Rightarrow$ в области S имеются **стоки**, т.е. места, где жидкость удаляется из потока (например, вода, протекающая по проржавевшей трубе)

- $\boxed{\text{Если } \Pi = 0} \Rightarrow$ в область S жидкости втекает столько же, сколько и вытекает, т.е. истоков и стоков нет, или их суммарное действие равно нулю (например, любая область струи воды из крана)

3. **Дивергенция.**

Определение | **Дивергенцией (расходимостью)** векторного поля $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ (Функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$) называется скаляр:

$$\boxed{div\vec{a}(M) = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_M + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_M + \left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_M},$$

где значения частных производных берутся в точке M

Формула связи дивергенции и потока (определение дивергенции через поток):

$$\boxed{div\vec{a}(M) = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint_S a_n(M)dS}{V}}, \qquad (5)$$

где V -объём, ограниченный замкнутой поверхностью S

Физический смысл: дивергенция векторного поля скоростей характеризует плотность истоков (или стоков) жидкости или по-другому – мощность истока или стока.

4. Формула Остроградского - Гаусса

• Формула Остроградского- Гаусса в координатной форме:

Пусть S - замкнутая гладкая ориентируемая поверхность, являющаяся границей тела V и $\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - единичная внешняя нормаль к S (отметим, что граница тела V пересекается с любой прямой, параллельной осям координат, не более чем в 2-ух точках, т.е. тело является простым). Пусть векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ непрерывно, дифференцируемо на S и в V, тогда:

$$\left.\begin{aligned}&\oiint\limits_S \overbrace{(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS}^{\text{поверхностный интеграл } 1^{\text{го}} \text{ рода}} =\\ &\oiint\limits_S \underbrace{P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy}_{\text{поверхностный интеграл } 2^{\text{го}} \text{ рода}} =\end{aligned}\right\} = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \qquad (10)$$

• Формула Остроградского- Гаусса в векторной форме:

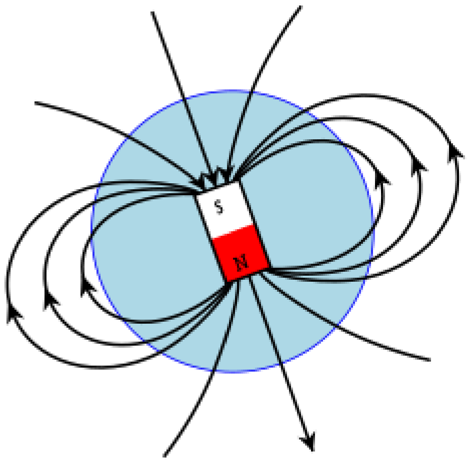
Поток вектора $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции поля $\vec{a}(M)$, взятому по области, ограниченной поверхностью S: $\boxed{\oiint\limits_S a_n(M)dS = \iiint\limits_V div\vec{a}(M)dV}$ (11)

Дополнительная информация к теме лекции: ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

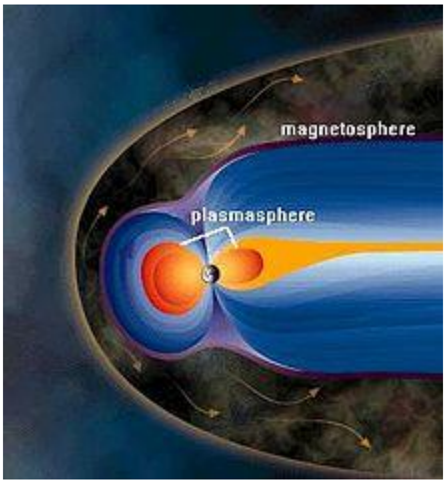
Если каждой точке M некоторой *области пространства* поставлен в соответствие *вектор* с началом в данной точке, то говорят, что в этой области задано *векторное поле*.

Из чего следует, что элементы векторного поля **не свободны**, то есть «привязаны» к точкам.

Примеры векторных полей.



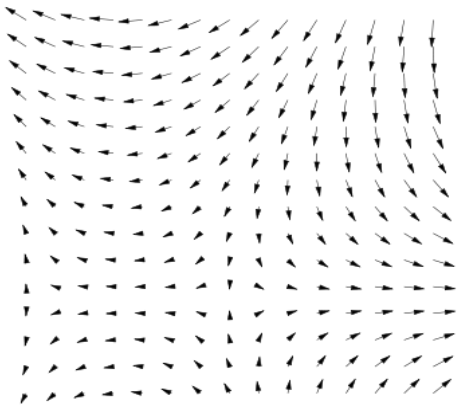
Магнитное поле нашей планеты Земля



Большую группу векторных полей образуют так называемые ***поля скоростей.*** Посмотрите на поле (которое с травкой) и мысленно очертите над ним произвольную пространственную область. Представьте, что над полем дует ветер – небольшой такой ураганчик для пущей наглядности. Теперь зафиксируем некоторый *момент времени* и каждой точке построенной области поставим в соответствие *несвободный* вектор, который характеризует:

а) направление движения воздуха в данной точке;
б) и скорость его движения в данной точке – чем выше скорость, тем длиннее вектор. Если в какой-то точке штиль, то ей сопоставляется нулевой вектор.

Множество этих векторов и образует *векторное поле скорости ветра* в данный момент



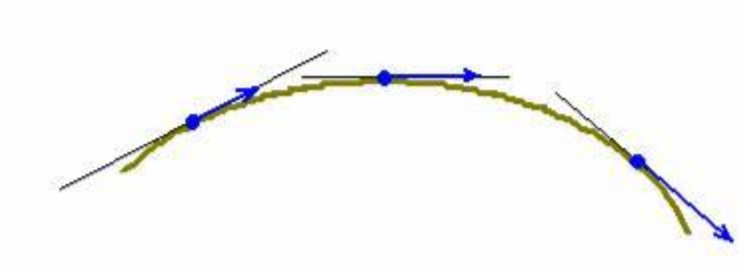
времени.

Аналогично устроено *поле скоростей* течения жидкости – так, например, каждой точке реки в *некоторый момент времени* можно поставить в соответствие вектор, указывающий направление и скорость течения жидкости в этой точке.

Векторные линии

Если скалярные поля описываются **линиями и поверхностями уровня**, то «форму» векторного поля можно охарактеризовать *векторными линиями*. Наверное, многие помнят этот школьный опыт: под лист бумаги помещаются магнит, а наверх *(смотрим!)* **высыпаются железные опилки**, которые как раз и «выстраиваются» по линиям поля.

Постараюсь сформулировать попроще: каждая точка векторной линии является началом *вектора поля*, который лежит на касательной в данной точке:



Разумеется, векторы линии в общем случае имеют разную длину, так на приведённом рисунке, при перемещении слева направо их длина растёт – здесь можно предположить, что мы приближаемся, например, к магниту. В силовых физических полях векторные линии так и называют – *силовыми линиями*. Другой, более простой пример – это гравитационное поле Земли: его силовые линии представляют собой *лучи* с началом в центре планеты, причём векторы *силы тяжести* расположены прямо на самих лучах.

Векторные линии скоростных полей называются *линями тока*. Ещё раз представьте пыльную бурю – частицы пыли вместе с молекулами воздуха как раз движутся по этим линиям. Аналогично с речкой: траектории, по которым движутся молекулы жидкости (и не только) – в прямом смысле и есть линии тока. Вообще, многие понятия теории поля пришли из гидродинамики, с чем мы ещё не раз столкнёмся.

Если «плоское» векторное поле задано ненулевой функцией $\overline{F}(x;y) = P(x;y)\overline{i} + Q(x;y)\overline{j}$, то его силовые линии можно найти из **дифференциального уравнения** $Q(x;y)dx = P(x;y)dy$. Решение $F(x;y) = C \;\; (C = const)$ данного уравнения задаёт **семейство** векторных линий на плоскости XOY. Иногда в задачах требуется изобразить несколько таких линий, что обычно не вызывает затруднений – выбрали несколько удобных значений «цэ», начертили какие-нибудь там **гиперболы**, и порядок.

С пространственным векторным полем $\overline{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}$ ситуация занятнее. Его силовые линии определяются соотношениями $\dfrac{dx}{P(x;y;z)} = \dfrac{dy}{Q(x;y;z)} = \dfrac{dz}{R(x;y;z)}$. Здесь нужно решить **систему двух дифференциальных уравнений** и получить два семейства $F_1(x;y;z) = C_1, \quad F_2(x;y;z) = C_2$ **пространственных поверхностей**. Линии пересечения этих семейств и будут пространственными векторными линиями. Если все компоненты («пэ», «ку», «эр») отличны от нуля, то существует несколько технических способов решения.

Дивергенция векторного поля. Формула Гаусса-Остроградского

Предположим, что поток через замкнутую поверхность $\overline{\sigma}$ оказался положителен: $\Pi > 0$. Что это означает? Это означает, что <u>за единицу времени</u> из области T жидкости вытекло БОЛЬШЕ, чем туда поступило. Следовательно, в области где-то есть *источник(и)* поля. Это может быть, например, приток реки, который увеличивает её скорость, или просто кто-то вылил ведро воды.

Отрицательное значение потока $\Pi < 0$ через замкнутую поверхность $\overline{\sigma}$ говорит нам о том, что за единицу времени область T «поглотила» жидкость (зашло больше, чем вышло). И причина тому – *сток(и)* поля в данной области. Например, подземная пещера или насос, выкачивающий воду.

И, наконец, при нулевом потоке $\Pi = 0$ возможны две ситуации: либо в области T **нет** *источников* и *стоков*, либо они компенсируют друг друга.

К слову, взаимная компенсация чаще всего имеет место и в первых двух случаях. Так, например, если $\Pi = 5 > 0$, то это ещё не значит, что стоков нет. Возможно, источники оказались мощнее, и по итогу *за единицу времени* через поверхность выплеснулось 5 единиц жидкости.

И поэтому появляется интерес выяснить, есть ли у векторного поля $\overline{F}$ источники / стоки, и если есть – то где.

Рассмотрим некоторую точку M области T и её *бесконечно малую* замкнутую окрестность *(например, сферу или куб)*. Поток векторного поля $\overline{F}$ *через поверхность* этой окрестности во внешнем направлении называется **дивергенцией** поля в данной точке, и обозначается через $div\overline{F}(M)$.

ПРИЧЁМ:

- если $div\overline{F}(M) > 0$, то у векторного поля $\overline{F}$ есть *источник* в данной точке *(её бесконечно малой окрестности)*

– если $div\overline{F}(M) < 0$, то *сток*;

– и если $div\overline{F}(M) = 0$, то в точке M нет источников и стоков.

Далее. **Как найти эту самую дивергенцию?** Если в каждой точке $M(x;y;z)$ области T определено векторное поле $\overline{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}$ и его компоненты P, Q, R дифференцируемы в этих точках, то скалярная функция дивергенции имеет следующий вид:

$$div\overline{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$ или, как записывают короче: $$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Таким образом, в области T ***векторному полю*** $\overline{F}(x;y;z)$ ставится в соответствие ***скалярное поле*** $div\overline{F}(M)$ его дивергенции.

Функция $div\overline{F}(M)$ позволяет нам вычислить дивергенцию в отдельно взятых точках, и возникает вопрос: а можно ли подсчитать суммарную дивергенцию по всему телу?

Можно. С помощью **тройного интеграла** $\iiint\limits_T div\overline{F}(M)dxdydz$, который **объединяет** значения $div\overline{F}(M)$ (элементарные потоки) через все *бесконечно малые* кусочки $dx \cdot dy \cdot dz$ тела T.

И ТЕПЕРЬ МЫ ПОДОШЛИ К ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЙ формуле Гаусса-Остроградского. Иногда её называют формулой Остроградского-Гаусса, иногда просто формулой Остроградского.

Поток векторного поля через замкнутую поверхность $\overline{\sigma}$ в направлении внешней единичной нормали $\overline{n}_0$ равен дивергенции данного поля, вычисленной по телу T, которое эта поверхность ограничивает:

$$\Pi = \oiint\limits_{\overline{\sigma}} \overline{F}(x;y;z)d\overline{\sigma} = \oiint\limits_{\sigma}(\overline{F}\cdot\overline{n}_0)d\sigma = \iiint\limits_T div\overline{F}dxdydz$$

Следует отметить, что в оригинале формула приводится в обратном порядке, и её краткий смысл таков: интеграл $\iiint\limits_T div\overline{F}dxdydz$ объединяет дивергенцию по всей области T, и если в ней есть ТОЛЬКО источники или ТОЛЬКО стоки, то происходит их суммирование. Если же там есть и то, и другое, то интеграл «взаимоуничтожает» элементарные потоки (дивергенции) разных знаков. Таким образом, во всех случаях в «сухом остатке» получается поток $\oiint\limits_{\sigma}(\overline{F}\cdot\overline{n}_0)d\sigma$ через внешнюю поверхность.