	<p>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации</p> <p>Образовательная программа направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» (уровень бакалавриата)</p>	<p>ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ для проведения промежуточной аттестации студентов по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»</p>
---	---	---

## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

#### ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА

#### РАЗДЕЛ 1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Предел функции, неопределенность (при нахождении предела функции); виды неопределенностей, встречающиеся при нахождении пределов функций и способы их раскрытия.

**Задача 1.** Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 + 5}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}} \quad 5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \quad 8) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$$

2. Непрерывность функции

**Задача 2.** Найти левосторонний и правосторонний пределы функции

$$f(x) = \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$$

**Задача 3.** Найти точки разрыва функции  $y = \frac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$ . Установить характер разрыва.


**Задача 4.** Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва и указать характер разрыва. Построить график функции:

$$y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x - 2, & 0 < x < 4 \\ -(x - 4)^2 + 2, & x \geq 4 \end{cases}$$

#### РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

1. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

**Задача 1.** Определите вид функции, найдите рациональный метод дифференцирования, укажите правила и формулы, используемые при дифференцировании заданных функций, и найдите производные заданных функций:

	<p>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации</p> <p>Образовательная программа направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» (уровень бакалавриата)</p>	<p>ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ для проведения промежуточной аттестации студентов по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»</p>
---	---	---

$$1) y = \ln \frac{(5-4x)}{\sqrt{x^2+8x-10}} \quad 2) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \quad 3) y = (5^{tg 2x} - x^2)^3 \quad 4) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$5) y'_x - ? \quad x = e^{-t} \sin t, y = e^t \cos t \quad 6) x'_y - ? \quad y = x + e^x \quad 7) y = \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{x^2 + 1}$$

$$8) y = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \cdot \sqrt[3]{5x-1}} \quad 9) u = \ln \operatorname{arccostg} \frac{1}{x} \quad 10) \operatorname{ctg}(xy) + \ln(4y+1)^{\frac{1}{2}} = 0$$

**Задача 2.** Доказать, что  $(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$  и найти (используя полученную формулу)  $y'''(x)$  для функций: 1)  $f(x) = xe^{-x}$  2)  $y = \frac{1}{x} \ln^2 x$

## 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Задача 1.** Составить уравнение касательной и нормали к графику кривой  $y = \sqrt{\frac{6-x^2}{3}}$  в точке  $x_0 = -\sqrt{3}$


**Задача 2.** Движение летчика при катапультировании из реактивного самолета приближенно можно описать формулой  $s = 3,7t^3 + \ln t - 19t$  (м). Определить скорость и ускорение летчика через 2с после катапультирования.

**Задача 3.** Две точки движутся по координатным осям согласно уравнениям:  $x = 2t - 9$  и  $y = -3t + 7(t \geq 0)$ . В какой момент времени расстояние между точками будет наименьшим? Покажите на графике расстояние между точками при  $t = 0$  и в момент их наибольшего сближения

**Задача 4.** Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема  $V$ . Каковы должны быть высота ведра и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести?

**Задача 5.** Предполагая, что объем ствола дерева пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год, показать, что скорость роста объема при диаметре 90см в 25раз больше, чем при диаметре 18см.

**Задача 6.** Определить сопротивление внешней цепи, при котором батарея сможет развить максимальную полезную мощность. ЭДС батареи 2,5В, внутреннее сопротивление 0,16 Ом. Чему равна максимальная полезная мощность, если мощность определяется по

	<p>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации</p> <p>Образовательная программа направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» (уровень бакалавриата)</p>	<p>ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ для проведения промежуточной аттестации студентов по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»</p>
---	---	---

формуле  $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$ , где  $\varepsilon$  - ЭДС элемента;  $R$  и  $r$  - сопротивление внешнее и внутреннее соответственно?

Задача 7. Найти приближенное значение функции  $y = \sqrt[3]{3x^2 + 8x - 16}$  при  $x = 3,94$ .

Задача 8. Используя правило Лопиталья, найдите следующие пределы

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$     2)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$     3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

### РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

#### 1. Техника интегрирования

- Укажите метод интегрирования. Найдите интегралы и проверьте результат

1)  $\int (3^x - (\frac{1}{3})^x) 3^x dx$     2)  $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$     3)  $\int \ln^2 x dx$

- Вычислите интегралы: 1)  $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$     2)  $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$

#### 2. Геометрические приложения ОИ

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $y = x^2 - 4x + 5$  и прямыми, касающимися ее в точках с абсциссами  $x_1 = 1, x_2 = 4$ . Сделать чертёж.

Задача 2. Река протекает по луку, образуя кривую  $y = x - 2 \cdot x^2$ . Единица длины - 1 км, ось  $OX$  - линия шоссе. Сколько гектаров луга между шоссе и рекой? (Ответ:  $S = \frac{25}{6}$  га)

Задача 3. Ватерлиния небольшого судна имеет форму кривой, уравнение которой  $\begin{cases} x = 2 + 2t - 2 \cos \frac{\pi \cdot t}{10} \\ y = 2 \sin \frac{\pi \cdot t}{10} \end{cases}$ , причём  $t$  изменяется от 0 до 10. Определить площадь сечения, ограниченного ватерлинией. (Ответ:  $S = \frac{80}{\pi} + 2\pi$ )

Задача 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $r = 2 \cos \varphi, r = 1$

(вне круга  $r = 1$ ).


Ответ:

$(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$  кв. ед.

Задача 5 - 7. Вычислить длины дуг кривых:

1)  $y = \frac{2}{5} x^4 \sqrt{x} - \frac{2}{3} \sqrt[4]{x^3}$  между точками пересечения с осью  $OX$ .    Ответ:  $(\frac{20}{9} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}})$  ед.

дл.

	<p>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации</p> <p>Образовательная программа направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» (уровень бакалавриата)</p>	<p>ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ для проведения промежуточной аттестации студентов по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»</p>
---	---	---

2) всей кривой  $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ . Ответ:  $\left(\frac{3\pi a}{2}\right)$  ед. дл.

3) дуги одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$  Ответ:  $8a$  ед. дл.

Определить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

Задача 8.  $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$  вокруг оси  $OX$ . Ответ:  $12\pi$  ед. объёма

Задача 9.  $y^2 = (x+4)^3$  и  $x = 0$  вокруг оси  $OY$ . Ответ:  $58,5\pi$  ед. объёма

Определить площадь поверхности, образованной вращением:

Задача 10. дуги кривой  $y = \frac{x^3}{3}$  от  $x = -2$  до  $x = 2$  вокруг оси  $OX$ .

Ответ:  $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$  ед.пл.

Задача 11. Дуги кривой  $y = \frac{x^2}{2}$ , отсечённой прямой  $y = 1,5$ , вокруг оси  $OY$ . Ответ:  $\frac{14}{3}\pi$  ед.пл.

### 3. Физические приложения ОИ


Задача 1. Найти массу стержня длиной 1 м, если линейная плотность стержня меняется по закону

$\lambda = \frac{dm}{dx} = 20x + 0,15x^2 \left(\frac{кг}{м}\right)$ , где  $x$  - расстояние от одного из концов стержня. Ответ: 150 кг

Задача 2. Для бензина зависимость теплоёмкости  $c$  при постоянном давлении от температуры  $t^\circ\text{C}$  выражается формулой  $c = 0,2237 + 0,00102 \cdot t$ . Чему равна средняя теплоёмкость бензина для температур, лежащих в интервале от  $t_1 = 116^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 218^\circ\text{C}$ ?

Задача 3. Материальная точка движется прямолинейно. Ускорение материальной точки изменяется по закону:  $a(t) = 8 + 4t + 14t^2$  какой скорости достигнет материальная точка через 0,4с после начала движения из состояния покоя? Какой путь пройдёт она за это время?

Задача 4. Задан закон изменения углового ускорения  $\varepsilon = (60t^2 + 4)\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ . Какой угловой скорости  $\omega$  достигнет материальная точка через 0,5с после начала движения из состояния покоя? Чему равно угловое перемещение  $\varphi$  за это время?

	<p>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации</p> <p>Образовательная программа направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» (уровень бакалавриата)</p>	<p>ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ для проведения промежуточной аттестации студентов по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»</p>
---	---	---

Задача 5. На движущуюся прямолинейно вдоль оси  $X$  материальную точку действует сила  $F = (At^3 + Bt)H$ , где  $A$  и  $B$  - постоянные величины. Найти изменение импульса материальной точки за вторую секунду с момента начала действия силы.

Задача 6. Найти изменение энтропии при изохорическом расширении 8 г кислорода, если температура газа изменилась от  $T_1 = 320$  до  $T_2 = 400$ К.

Подсказка:  $dS = \frac{dQ}{T}$ ,  $dQ = \frac{m}{M} c_V dT$ ,  $c_V = \frac{i}{2} R$ .

Задача 6. Какую работу надо совершить, чтобы тело массой 1кг удалить в бесконечность с поверхности Земли?