ЛЕКЦИЯ 3

ТЕМА: Числовые ряды.

Вопросы темы: Числовые ряды, признаки сходимости. Понятие и свойства числового ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Представление функции в виде ряда. Приближенное вычисление определенного интеграла.

Числовой ряд (numerical series)

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Пример.

Числовой ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Этот ряд называется гармоническим.

Терминология и обозначения

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами числового ряда.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_n$$

un- общий член ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$$

S*n*-частичная сумма ряда

Сходящийся ряд (convergent series)

Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Число S называется **суммой** числового ряда.

Если конечного предела нет, то ряд называют **расходящимся**.

Сходимость геометрического ряда

Геометрический ряд составлен из членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

Частичная сумма этого ряда:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Конечный предел имеется при **|q|** < 1 и равен

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

При |q| ≥ 1 ряд расходится.

Свойства сходящихся рядов

Свойство 1. Если ряд сходится и имеет сумму S, то ряд , полученный умножением данного ряда на число .λ, также сходится и имеет сумму .λ S.

Свойство 2. Если два ряда сходятся и имеют сумму S_1 и S_2, соответственно, то и ряд, представляющий собой сумму данных рядов, также сходится и его сумма равна $S_1 + S_2$.

Свойство 3. Если ряд сходится , то сходится и ряд , полученный из него отбрасыванием конечного числа членов.

Свойство 4. Для того , чтобы ряд сходился , необходимо и достаточно, чтобы при n→. остаток ряда стремился к нулю.

Теорема. Если ряд сходится, то предел его общего члена при n →∞. равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Следствие. Если предел общего члена ряда при n→∞. не равен нулю, то ряд расходится.

Теорема. Пусть даны два ряда с положительными членами: и члены первого не превосходят членов второго при любом n:

Тогда: (1) если сходится второй, то сходится и первый.

(2) если первый расходится, то второй расходится.

Для применения признака сравнения используются «эталонные ряды»:

Геометрический ряд

$\sum_{i=1}^{\infty} aq^{n-1}$ Сходится при |q| < 1, расходится при |q|>1

Гармонический ряд

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Расходится

Обобщенный гармонический ряд

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ Сходится при .$\alpha > 1$ Расходится при .. $\alpha \le 1$

Предельный признак сравнения

Теорема. Если для двух рядов с положительными членами существует конечный предел отношения их общих членов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = C \neq 0$$

то эти ряды одновременно сходятся либо расходятся.

Теорема. Пусть для ряда с положительными членами существует предел отношения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = C$$

Тогда: (1) Если C < 1, то ряд расходится.

(2) Если C > 1, то ряд сходится.

(3) Если C = 1, то вопрос о сходимости не решен.

Знакочередующийся ряд (alternating series)

Под знакочередующимся рядом понимается ряд , в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots \qquad u_n > 0$$

Признак Лейбница

Теорема. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине:

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$$

и предел его общего члена при n→∞. равен нулю , то ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена:

$$S \le u_1$$

Знакопеременный ряд

Знакопеременным называется ряд, в котором любой его член может быть как положительным, так и отрицательным.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

В чем отличие от знакочередующегося ряда?

Достаточный признак сходимости

Теорема. Если ряд , составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$ сходится, то сходится и данный ряд.

Степенной ряд и область сходимости

Степенным называется ряд , членами которого являются степенные функции:

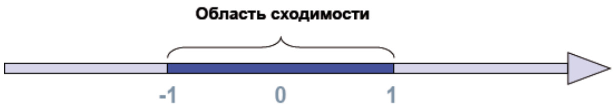
$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

Совокупность значений x, при которых ряд сходится называется областью сходимости степенного ряда.

Пример

Степенной ряд: $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

имеет в качестве области сходимости интервал (–1; 1).



Теорема Абеля

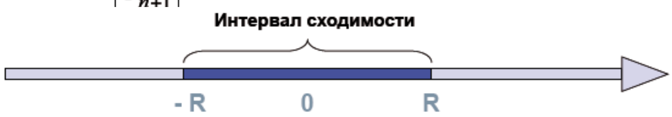
1. Если степенной ряд сходится при значении $x = x_0$ (не равном нулю), то он сходится и при всех значениях x, которые по абсолютной величине меньше x_0.

2. Если степенной ряд расходится при значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x, которые по абсолютной величине больше x_1.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число R, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда . Его находят по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$



Пример

Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Решение

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Получили, что радиус сходимости этого ряда бесконечен.

Разложение функции в степенной ряд

Как пример возьмем функцию $f(x)=(x-1)^3$

мы легко можем представить ее в виде:

$f(x)=-1+3x-3x^2+x^3$

Это конечный степенной ряд.

Возникает вопрос, а возможно ли другие функции представить в виде степенного ряда, пусть даже бесконечного?

Разложение функции в степенной ряд

Функция f(x), определенная и дифференцируемая бесконечное число раз в окрестности точки x=0, может быть представлена в виде суммы степенного ряда:

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

Для нахождения коэффициентов C_i найдем производные функции f(x) и их значения в нуле:

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots \Rightarrow f(0)=c_0$$

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots \Rightarrow f'(0)=c_1$$

$$f''(x)=2c_2+3\cdot 2c_3x+\ldots \Rightarrow f''(0)=2c_2$$

$$f'''(x)=3\cdot 2c_3+4\cdot 3\cdot 2c_4x+\ldots \Rightarrow f'''(0)=3\cdot 2c_3$$

$$\Rightarrow c_2=\frac{f''(0)}{2!}\quad c_3=\frac{f'''(0)}{3!}\quad \ldots \quad \boxed{c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

Ряд Маклорена

Рядом Маклорена называется следующее разложение функции в степенной ряд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Можно представить:

$$f(x)=\underbrace{S_n(x)}_{\text{Частичная сумма ряда}}+\underbrace{r_n(x)}_{\text{Остаточный член}}$$

Сходимость ряда Маклорена

Теорема. Для того, чтобы ряд Маклорена сходился к функции f(x), необходимо и достаточно , чтобы при n>. остаток ряда стремился к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

Пример разложения в ряд Маклорена

Функция **$y=e^x$**

Разложение

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Область сходимости
(- ∞, + ∞)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Область сходимости
(- ∞, + ∞)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

Область сходимости
(- 1, 1)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots$$

Область сходимости
(- 1, 1]

Проверить самостоятельно.

Бином Ньютона

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Коэффициенты разложения находятся по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ряд Тейлора

Ряд Маклорена является частным случаем ряда Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

Формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Остаточный член

Приближенные вычисления

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} \qquad e^{-\frac{3}{5}} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2 \cdot 2!} - \frac{3^3}{5^3 \cdot 3!} + \ldots =$$
$$= 1 - 0{,}6 + 0{,}18 - 0{,}036 + \ldots$$

$$\ln 0{,}8 \qquad \ln 0{,}8 = -0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2!} - \frac{0{,}2^3}{3!} - \ldots =$$
$$= -0{,}2 - 0{,}02 - 0{,}00266 -$$